数　　学

氏名	

受験番号	

1　2 次関数 $y=-x^2+ax+b$ のグラフ F は 2 点 $(-2,-7)$, $(2,1)$ を通り，1 次関数 $y=cx+d$ のグラフ G は F に接する。このとき次の問に答えよ。

(1) 定数 a,b の値を求めよ。

(2) 定数 d を c の式で表せ。

(3) F を 2 次関数 $y=-x^2$ のグラフに重ねる平行移動によって，G が G 自身に重なるとき，定数 c,d の値を求めよ。

(4) (3) で定めた G と, F および直線 $x=k$ で囲まれる部分の面積が 9 になるとき，定数 k の値を求めよ。

[解答欄]

(1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} -4-2a+b=-7 \\ -4+2a+b=1 \end{cases}$ を解いて，$a=2$, $b=1$。

(2) グラフ G は F に接するので $-x^2+2x+1=cx+d$ は重解を持つ。したがって，$x^2+(c-2)x+(d-1)=0$ の判別式は 0，すなわち $(c-2)^2-4(d-1)=0$ となる。よって，$d=\dfrac{1}{4}(c-2)^2+1$。

(3) F は 2 次関数 $y=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$ のグラフなので，F は x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動することで，$y=-x^2$ のグラフに重なる。この平行移動によって，G は

$$y=c(x+1)+d-2$$

のグラフに重なるので，このグラフが G と一致すればよい。すなわち，

$$c(x+1)+d-2=cx+d$$

となり $c=2$ がわかる。このとき，(2) より，$d=1$ となる。

(4) G は点 $(0,1)$ で F に接し，$(2x+1)-(-x^2+2x+1)=x^2$ なので，F,G および，$x=k$ で囲まれる部分の面積は

$$\begin{cases} \int_0^k x^2dx=\dfrac{k^3}{3} & (k>0) \\ \int_k^0 x^2dx=-\dfrac{k^3}{3} & (k<0) \end{cases}$$

これらが 9 になるのは，$k=\pm3$ のとき。

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

2　次の問に答えよ。

(1) $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{8}$ のとき，$\log_x y$ の値を求めよ。

(2) x, y が正の数で，$\log_x y = t$ とするとき，$\log_x y + \log_y \dfrac{x^3}{y^4}$ を t で表せ。

(3) 連立不等式

$$0<x<1,\quad 0<y<1,\quad \log_x y + \log_y \frac{x^3}{y^4} < 0$$

の表す領域を，xy 平面上に図示せよ。ただし，この領域で $\log_x y > 0$ が成り立つことを用いてよいとする。

[解答欄]

(1) $x=\dfrac{1}{2}=2^{-1},\ y=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$ より，$y=x^3$ となる。したがって $\log_x y = 3$ となる。

(2) $\log_y \dfrac{x^3}{y^4} = 3\log_y x - 4 = \dfrac{3}{\log_x y} - 4 = \dfrac{3}{t} - 4$ となる。よって，$\log_x y + \log_y \dfrac{x^3}{y^4} = t + \dfrac{3}{t} - 4$ である。

(3) $\log_x y + \log_y \dfrac{x^3}{y^4} < 0$ を t で表すと

$$t + \frac{3}{t} - 4 < 0$$

となる。$0<x<1,\ 0<y<1$ のとき $t=\log_x y>0$ であるから両辺に t をかけて

$$t^2 - 4t + 3 < 0$$

となる。$t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$ なので

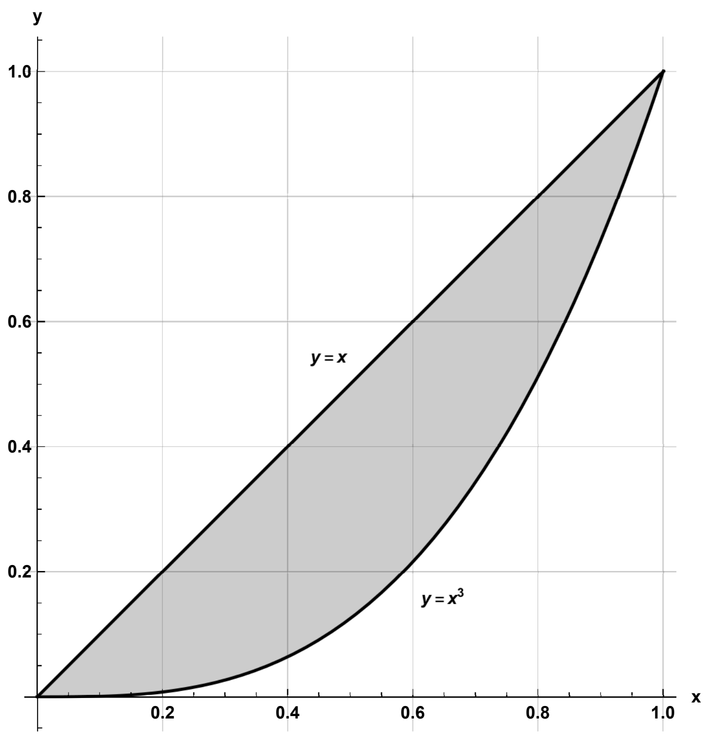
$$1 < t\,(=\log_x y) < 3$$

となる。$0<x<1$ なので x^t は t に関して単調減少関数であるから

$$x > y > x^3 \qquad (0<x, y<1)$$

となる。

この領域を図示すると, 下図のようになる。ただし, 境界線は含まない。



得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3 次の 2 条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

1. $a_1 > 0,\ a_{n+1} \neq a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$
2. 初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき,

$$S_n = a_n^2 + na_n - 4 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

このとき次の問に答えよ。

(1) 初項 a_1 を求めよ。

(2) $b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき, 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a_k = 0$ を満たす k を求めよ。

[解答欄]

(1) $a_1 > 0$ かつ $a_1 = S_1 = a_1^2 + a_1 - 4$ なので, これを解いて $a_1 = 2$ となる。

(2) $k \geqq 2$ のとき, $a_k = S_k - S_{k-1}$ なので

$$\begin{aligned} a_k &= (a_k^2 + ka_k - 4) - \{a_{k-1}^2 + (k-1)a_{k-1} - 4\} \\ &= a_k^2 - a_{k-1}^2 + ka_k - (k-1)a_{k-1} \end{aligned}$$

となる。これより, $a_2 = -3, a_3 = 1$ がわかる。またこの式を変形すると

$$0 = a_k^2 - a_{k-1}^2 + (k-1)a_k - (k-1)a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})\{a_k + a_{k-1} + (k-1)\}$$

となり, 仮定から $a_k - a_{k-1} \neq 0$ なので $a_k + a_{k-1} + (k-1) = 0$ である。すなわち, $a_k + a_{k-1} = -k + 1$ なので

$$\begin{aligned} b_{k+1} + c_k &= a_{2k+1} + a_{2k} = -(2k+1) + 1 = -2k \\ c_k + b_k &= a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1 \end{aligned}$$

となる。これより

$$b_{k+1} - b_k = -1 \quad (k \geqq 2)$$

となるが, $b_1 = a_1 = 2,\ b_2 = a_3 = 1$ なので $k = 1$ のときもこの式は成立する。したがって, $\{b_n\}$ は初項 2, 公差 -1 の等差数列である。したがって一般項は

$$b_n = 2 - (n-1) = -n + 3$$

となる。また, $c_k + b_k = a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1$ より $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = -b_n - 2n + 1 = -(-n+3) - 2n + 1 = -n - 2$$

となる。

(3) (2) より $c_n < 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ であり, $b_n = 0$ となるのは $n = 3$ のみ。したがって $a_k = 0$ となるのは $a_k = b_3$ のときのみ, すなわち $k = 5$ のときのみである。

得点	

数　　　学

氏 名	

受験番号	

4 原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円 C_1 と媒介変数表示 $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す曲線 C_2 について，次の問に答えよ。

(1) C_1 と C_2 の第 1 象限にある交点を求めよ。

(2) (1) で求めた交点における C_2 の接線の方程式を求めよ。

(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ なので，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると曲線の方程式はそれぞれ

$$C_1 : x^2 + y^2 = 3 \qquad C_2 : x^2 - y^2 = 1 (x \geqq 1)$$

となる。したがって, 求める交点は $x^2 + (x^2 - 1) = 3$ を解いて $x = \sqrt{2}$ $(x \geqq 1)$ なので $(\sqrt{2}, 1)$ である。

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$$

となる。したがって，点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式の傾きは $\sqrt{2}$ となるので求める方程式は $y-1 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) = \sqrt{2}x-2$, すなわち $y = \sqrt{2}x - 1$ である。

(3) 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V = &= 2\pi \int_0^1 \{(3 - y^2) - (y^2 + 1)\} dy \\ &= -4\pi \int_0^1 (y^2 - 1) dy \\ &= -4\pi \left[\frac{y^3}{3} - y\right]_0^1 \\ &= -4\pi \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

得点	

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

$\boxed{5}$ 　座標空間において原点 O, 点 $A(1,-2,2)$, 点 $B(3,-4,5)$ をとり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。このとき次の問に答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分表示せよ。

(2) 点 F は平面 α 上にあり, その位置ベクトル $\vec{f}$ は $\overrightarrow{OA}$ と垂直な単位ベクトルである。ただし, $\vec{f}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている。点 F の座標を求めよ。

(3) 点 $P(0,0,2)$ の位置ベクトルを $\vec{p}$ とおく。s,t がそれぞれ実数全体を動くとき, $|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|$ の最小値を求めよ。

[解答欄]

(1) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{9}=3$ より $\vec{e}=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ となる。

(2) 点 F は平面 α 上にあるので

$$\vec{f}=\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$$

となる実数 k,l がある。$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e}=3,\ \overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}=\frac{1}{3}(3+8+10)=7$ に注意すると, $\vec{f}\perp\vec{e}$ なので

$$\vec{f}\cdot\vec{e}=3k+7l=0$$

となり, $k=-7c,\ l=3c$ (c は実数）と書ける。このとき

$$\vec{f}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}=c\left(-7\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)=c(2,2,1)$$

となり, $\vec{f}\cdot\overrightarrow{OB}=c(6-8+5)=3c$ となる。$\vec{f}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしているので $\vec{f}\cdot\overrightarrow{OB}>0$, すなわち $c>0$ である。よって $\vec{f}$ は方向が $(2,2,1)$ の単位ベクトルであるから

$$\vec{f}=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2,2,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

となる。

(3) $|\vec{p}|=2,\ \vec{p}\cdot\vec{e}=\dfrac{4}{3},\ \vec{p}\cdot\vec{f}=\dfrac{2}{3},\ |\vec{e}|=|\vec{f}|=1,\ \vec{e}\cdot\vec{f}=0$ を用いると

$$\begin{aligned}|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|^2 &= (\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\cdot(\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\\ &= |\vec{p}|^2-2(s\vec{p}\cdot\vec{e}+t\vec{p}\cdot\vec{f})+s^2|\vec{e}|^2+2st\vec{e}\cdot\vec{f}+t^2|\vec{f}|^2\\ &= 4-\frac{8}{3}s-\frac{4}{3}t+s^2+t^2\\ &= \left(s-\frac{4}{3}\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{9}\end{aligned}$$

となるので $s=\dfrac{4}{3},\ t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$ をとる。

得 点	